超限帰納法

@mod_poppo

2021 年 7 月 25 日

この文書では，$<$ や $\prec$ で表される関係は非反射的（つまり，$x \not< x$, $x \not\prec x$）とする．

1 整列集合と整礎集合

定義 1 (整列集合)**.** 順序集合 $(X, <)$ が整列集合 (well-ordered set) であるとは，X の空でない任意の部分集合 A に最小元が存在することである．

例 2. 自然数の集合 $\mathbf{N}$ は整列集合である．整数の集合 $\mathbf{Z}$ は整列集合ではない．

定義 3 (整礎集合)**.** 集合 X 上の二項関係 $\prec$ が整礎（せいそ）である (well-founded) とは，X の空でない任意の部分集合 A に，$\prec$ についての極小元が存在することである．

整礎関係 $\prec$ の入った集合 $(X, \prec)$ を整礎集合と呼ぶ．

例 4. ZF 集合論の整礎性公理（基礎の公理，正則性の公理とも言う）は，membership relation $\in$ が整礎関係であることを要請している．

注 5. 整列集合は整礎集合である．

注 6. 全順序集合 $(X, <)$ の順序 $<$ が整礎ならば，これは整列集合である．

命題 7. 整礎集合には無限降下列は存在しない．

逆に，選択公理の下では，無限降下列が存在しない集合は整礎集合である．

Proof. 集合 X に無限降下列 $\cdots \prec x_{i+1} \prec x_i \prec \cdots \prec x_0$ が存在したとする．$A = \{x_i\}$ とおけば，これは X の空でない部分集合であるが，極小元を持たない．よって X は整礎集合ではない．

X が整礎集合でないと仮定して，無限降下列の存在を導く．X から極小元の存在しない非空部分集合を一つ取って，A とする．A の元 a について，$A(a) = \{x \in A \mid x \prec a\}$ とおく．極小元が存在しないという仮定より，各 $A(a)$ は空ではない．そこで，選択公理により，$A(\cdot)$ の選択関数 f を取る．つまり $f(a) \in A(a)$ とする．A の元を一つ取って a_0 とおき，$a_{i+1} = f(a_i)$ とおく．この $\{a_i\}$ は X の無限降下列となっている． □

2 超限帰納法

定理 8 (超限帰納法)**.** 整礎集合 $(X, <)$ とその上の命題 P について，

$$\forall x \in X.\ ((\forall y < x.\ P(y)) \Rightarrow P(x)) \tag{1}$$

が成り立てば $\forall x \in X.\ P(x)$ である．これを超限帰納法 (transfinite induction) という．

Proof. X の部分集合 A を $A = \{x \in X \mid \neg P(x)\}$ により定める．A が空でないと仮定すると，整礎性より極小元 $m \in A$ が存在する．A の定義と m の極小性より，$y < m$ となる任意の y について $P(y)$ が成り立つ．すると，仮定 1 より $P(m)$ が成り立つ．しかし，これは $m \in A$ に反する．

よって，A は空集合であり，すべての $x \in X$ について $P(x)$ が成り立つ． □

注 9. 超限帰納法は，普通は整列集合についての定理を指すが，それを証明するにあたっては整礎性以外の性質は必要ないので，ここでは整礎集合についての定理として定式化した．整礎集合についての超限帰納法を特に整礎帰納法 (well-founded induction) と呼ぶ場合がある．

注 10. 超限帰納法は，自然数についての数学的帰納法の一般化である．とくに，数学的帰納法の中でも「n 未満のすべての k について命題が成り立つと仮定する」パターンの一般化になっている．

注 11. 超限帰納法の条件 1 は，一見すると起点への言及がないように見える．しかし，条件 1 は極小元 m について無仮定で $P(m)$ が成り立つことを要請しているので，条件 1 に起点への言及も含まれていると思って良い．